Lineare Algebra II

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 3

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov, Katharina Novikov und Oliver Hendrichs im Sommersemester 25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de. Verteilung der Lösungen ist erlaubt und erwünscht.

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und (V, f) ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Endomorphismus. Wir betrachten die von f auf V induzierte $\mathbb{K}[X]$-Modulstruktur. Zeige, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

1. Es existiert $v \in V$, sodass $\langle v, f(v), f^2(v), \ldots \rangle = V$.
2. V ist als $\mathbb{K}[X]$-Modul von einem Element erzeugt.
3. Es existiert ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{K}[X]$, sodass $V \simeq \mathbb{K}[X]/P$, sodass f dem Endomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X]/P &\to \mathbb{K}[X]/P \\ v &\mapsto Xv \end{aligned}$$

entspricht.

Lösung:

Wir überlegen uns noch, was diese induzierte Struktur überhaupt ist.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein Vektorraum und $f : V \to V$ ein Homomorphismus. Dann induziert f auf V eine $\mathbb{K}[X]$-Struktur durch

$$X^k \cdot v = f^k(v) \forall k \in \mathbb{N}_0$$

das heißt allgemeiner für $Q \in \mathbb{K}[X]$ durch

$$Q \cdot v = Q(f) \cdot v$$

Ist $Q(X) = \alpha_n X^n + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$, dann gilt also

$$Q \cdot v = \alpha_n f^n(v) + \ldots + \alpha_1 f(v) + \alpha_0 v$$

wobei $f^n(v)$ die n-fache Komposition von f ist.

Ein $\mathbb{K}[X]$-Modul benötigt stets eine Moduladdition und eine Skalarmultiplikation. Die Moduladdition entspricht der Vektoraddition von V als Vektorraum und die Skalarmultiplikation $\mathbb{K}[X] \times V \to V$ wird durch $X^k \cdot v := f^k(v)$ und linearer Fortsetzung dessen bereits eindeutig bestimmt. Wir zeigen

nun die Äquivalenzen:
Es ist wichtig, hier den Unterschied von $\mathbb{K}[X]$ und $\mathbb{K}[X]/P$ im Kopf zu behalten. Während $\mathbb{K}[X]$ als Ring für die Modulstruktur von V agiert, Elemente $Q \in \mathbb{K}[X]$ also nicht alleine stehen, sondern nur als Skalar für einen Vektor $v \in V$ auftreten, tritt $\mathbb{K}[X]/P$ in dieser Aufgabe als Vektorraum auf und die Elemente sind Vektoren. Wir erinnern uns, dass

$$\mathbb{1}_{\mathbb{K}[X]/P} = \mathbb{1}_{\mathbb{K}[X]} = \mathbb{1}_{\mathbb{K}}$$

- "1 ⇒ 2"

Wir nehmen an, dass $\left\langle v, f(v), f^2(v), \ldots, \right\rangle = V$. Da per Definition $f^k(v) = X^k v$ gilt damit auch, dass

$$\left\langle v, Xv, X^2 v, \ldots, \right\rangle = V$$

Jede endliche Linearkombination (im Vektorraum V) mit Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{K}$

$$w = \alpha_k f^k(v) + \ldots + \alpha_1 f(v) + \alpha_0 v$$

kann damit auch dargestellt werden als

$$w = Q(f)v = Qv$$

mit

$$Q = \alpha_k X^k + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$$

also wird V als $\mathbb{K}[X]$-Modul von v erzeugt.

- "2 ⇒ 1"

Diese Richtung verläuft im Prinzip analog zur ersten. Wenn V als $\mathbb{K}[X]$-Modul von v erzeugt wird, dann gilt $\forall w \in V \exists Q \in \mathbb{K}[X]$, sodass $Q(f)(v) = w$. Es gilt

$$Q(X) = \alpha_k X^k + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$$

und damit

$$Q(f)(v) = \alpha_k f^k(v) + \ldots + \alpha_1 f(v) + \alpha_0 v = w$$

also gilt $\left\langle v, f(v), f^2(v), \ldots \right\rangle = V$ als Vektorraum.

- "3 ⇒ 1"

Es sei ein normiertes P wie in der Aufgabenstellung gegeben. f entspricht dem Endomorphismus $Q \mapsto XQ$. Laut Tutoriumsblatt 2, Aufgabe 3.1 wird $\mathbb{K}[X]/P$ als V-Vektorraum durch

$$\{\overline{\mathbb{1}_{\mathbb{K}}}, \overline{X}, \ldots, \overline{X^{\deg(P)-1}}\}$$

erzeugt. Sei $\psi : \mathbb{K}[X]/P \to V$ der gegebene Isomorphismus, dann definiere $v := \psi(\mathbb{1}_{\mathbb{K}})$, dann gilt auch

$$\psi(X) = \psi(X \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{K}}) = f(\psi(\mathbb{1}_{\mathbb{K}})) = f(v)$$

und analog für beliebige X^k. Da $\mathbb{K}[X]/P$ von $\{X^k | k \in \mathbb{N}_0\}$ als Vektorraum erzeugt wird und

ψ bijektiv ist, wird damit V als Vektorraum von $\{\psi(X^k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} = \{f^k(v) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugt.

- "$1 \Rightarrow 3$"

Wir nehmen an, dass $\{v, f(v), \ldots\}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[X] &\to V \\ X^k &\mapsto f^k(v) \end{aligned}$$

hierbei ist gemeint, dass $\varphi(\mathbb{1}_{\mathbb{K}}) = v$. Diese Abbildung ist ein Homomorphismus von $\mathbb{K}[X]$-Moduln. Die Abbildung ist surjektiv, da wir alle $f^k(v)$ treffen und diese V erzeugen. Betrachten wir $\ker(\varphi)$. Seien $\alpha \in \mathbb{K}[X]$ und $a, b \in \mathbb{K}[X]$, dann gilt

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = 0$$

und

$$\varphi(\alpha b) = \alpha\varphi(b)$$

also ist $\ker(\varphi)$ ein Ideal von $\mathbb{K}[X]$ als Polynomring. Polynomringe sind Hauptidealringe, also ist auch $\ker(\varphi)$ ein Hauptideal und wird von einem Polynom $P \in \mathbb{K}[X]$ erzeugt.
Mit dem Homomorphiesatz für Moduln folgt nun, dass

$$V \simeq \mathbb{K}[X]/\ker(\varphi) = \mathbb{K}[X]/P$$

und weil φ über die Wirkung von f definiert wurde, sind unsere Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 2
Zeige unter den Bedingungen von Aufgabe 1, dass

$$\chi_f = \mu_f = P$$

Lösung:

Wir erinnern uns, dass das Minimalpolynom das normierte Polynom minimalen Grades ist, sodass $\mu_f(f) = 0$ und das charakteristische Polynom ist definiert als $\chi_f(X) = \det(X\mathbb{1}_V - A_f)$ wobei A_f die darstellende Matrix von f sei. Sei $v \in V$ so, dass $v, f(v), \ldots$ ein Erzeugendensystem von V sind. Da wir in $\mathbb{K}[X]/P$ sind, gilt $P(X) = 0$ und aufgrund der Identifikation von X und f damit auch $P(f) = P(X) = 0$. Damit gilt $\mu_f \mid P$. Sei nun andererseits $Q \in \mathbb{K}[X]$ mit $Q(f) = 0$, dann gilt

$$0 = Q(f)(v) = \overline{Q(X)\mathbb{1}_{\mathbb{K}}}$$

also auch $Q = Q\mathbb{1}_{\mathbb{K}} \equiv 0 \mod P$ und damit $P \mid Q$. Da $\mu_f(f) = 0$ folgt damit auch $P \mid \mu_f$. Da die beiden Polynome nun gegenseitig Teiler voneinander sind, muss also $P = \mu_f$ gelten.
Wir erinnern uns (Tutoriumsblatt 2, Aufgabe 3.1), dass $\{\overline{\mathbb{1}_{\mathbb{K}}}, \overline{X}, \ldots, \overline{X^{\deg(P)-1}}\}$ eine Basis von $\mathbb{K}[X]/P$ ist, also $\dim(\mathbb{K}[X]/P) = \dim(V) = \deg(P)$ gilt. Die darstellende Matrix einer Abbildung $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist immer eine $n \times n$-quadratische Matrix und daher hat ihre Determinante Grad n. In unserem Fall heißt das also, dass $\deg(\chi_f) = \dim(V)$ gilt und damit insgesamt

$$\deg(\chi_f) = \dim(V) = \deg(P) = \deg(\mu_f)$$

und da $\mu_f \mid \chi_f$ gilt, weil $\chi_f(f) = 0$ gilt, folgt damit sofort, dass $\mu_f = \chi_f$ - man beachte hier, dass das charakteristische Polynom normiert ist, die beiden Polynome sind also wirklich gleich und nicht nur modulo Einheiten gleich.
Damit haben wir die Gleichheit der drei Polynome gezeigt.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring und M ein $\mathcal{R}$-Modul. Wir definieren

$$\mathsf{ann}_{\mathcal{R}}(M) := \{a \in \mathcal{R} \mid \forall m \in M : am = 0\}$$

1. Zeige, dass $\mathsf{ann}_{\mathcal{R}}(M)$ ein Ideal von $\mathcal{R}$ ist.
2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathcal{R} = \mathbb{K}[X]$ und (V, f) ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Endomorphismus und induzierter $\mathbb{K}[X]$-Modulstruktur. Zeige, dass
$$\mathsf{ann}_{\mathbb{K}[X]}(V, f) = (\mu_f(X))$$
als Ideale in $\mathbb{K}[X]$ gilt.

Lösung:

1. Um zu zeigen, dass $\mathsf{ann}_{\mathcal{R}}(M)$ ein Ideal ist, zeigen wir wie üblich, dass es eine additive Untergruppe ist und die Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{R}$ wieder in $\mathsf{ann}_{\mathcal{R}}(M)$ landet. Seien dafür $\alpha, \beta \in \mathsf{ann}_{\mathcal{R}}(M), r \in \mathcal{R}$ und $m \in M$, dann gilt:
$$(\alpha + \beta)m = \alpha m + \beta m = 0$$
$$(r\alpha)m = r(\alpha m) = 0$$
Da beide Eigenschaften erfüllt sind, gilt also $\mathsf{ann}_{\mathcal{R}}(M) \lhd \mathcal{R}$.
2. Wir zeigen die Gleichheit der Ideale durch gegenseitige Inklusion. Wir erinnern uns, dass für Hauptideale $(\mu_f) = \mu_f\mathbb{K}[X]$ gilt. Wir zeigen zuerst, dass (μ_f) eine Teilmenge des Annihilators ist. Seien dafür $P \in (\mu_f)$ und $v \in V$. Dann gilt $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, sodass $P = Q\mu_f$ und damit
$$Pv = Q\mu_f v = Q\mu_f(f)(v) = 0$$
wobei wir verwendet haben, dass $f^k(v) = X^k v$, also gilt $P \in \mathsf{ann}_{\mathbb{K}[X]}(V, f)$.
Umgekehrt sei $P \in \mathsf{ann}_{\mathbb{K}[X]}(V, f)$, dann gilt
$$0 = Pv = P(f)(v)$$
also gilt $\mu_f \mid P$ und damit $P \in (\mu_f)$, die beiden Ideale sind also gleich.

Aufgabe 4
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ und seien $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ koprim, sodass $P = P_1 \cdot P_2$. Sei (V, f) ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Homomorphismus, der die übliche $\mathbb{K}[X]$-Modulstruktur induziert. Angenommen $P(f) = 0$, zeige

$$V \simeq \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f)) \simeq \mathsf{im}P_2(f) \oplus \mathsf{im}P_1(f)$$

Lösung:
Vielen Dank an Anton Lin, der mir freundlicherweise seine Lösung zur Verfügung gestellt hat.

Wir wollen zuerst hilfreiche Aussagen zeigen:

- Da P_1, P_2 koprim sind, können wir die Aussage von Tutoriumsblatt 2, Aufgabe 4 anwenden, es gilt also
$$\mathbb{K}[X]/P \simeq \mathbb{K}[X]/P_1 \times \mathbb{K}[X]/P_2$$
- Da $P(f) = 0$ gilt, wissen wir, dass P im von μ_f erzeugten Ideal liegt, es gilt also $P = \mu_f \cdot Q$. Wir definieren nun eine Projektion:
$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{K}[X]/P &\to \mathbb{K}[X]/\mu_f \\ F &\mapsto \overline{F} \end{aligned}$$
Diese ist wohldefiniert, da $\pi(a + P\mathbb{K}[X]) = \pi(a + \mu_f Q\mathbb{K}[X]) = a + \mu_f Q\mathbb{K}[X] = b + \mu_f Q\mathbb{K}[X]$ für $a \equiv b \mod P$ Dann ist $\mathbb{K}[X]/\mu_f$ ein $\mathbb{K}[X]/P$-Modul, vermittels der Operation
$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K}[X]/P \times \mathbb{K}[X]/\mu_f &\to \mathbb{K}[X]/\mu_f \\ (F, v) &\mapsto \pi(F) \cdot v \end{aligned}$$
- Sei nun $F + \mu_f\mathbb{K}[X] \in \mathbb{K}[X]/\mu_f$, dann gilt
$$\pi(F + P\mathbb{K}[X]) = \pi(F + \mu_f \cdot Q \cdot \mathbb{K}[X]) = F + \mu_f\mathbb{K}[X]$$
also ist π surjektiv, das heißt $\mathbb{1}_{\mathbb{K}}$ erzeugt als einzelnes Element $\mathbb{K}[X]/\mu_f$ als $\mathbb{K}[X]/P$-Modul.

Wir sehen mit Aufgabe 1, dass ein normiertes Polynom $G \in \mathbb{K}[X]$ existiert, sodass $V \simeq \mathbb{K}[X]/G$ und mit Aufgabe 2, dass $G = \mu_f$, also $V \simeq \mathbb{K}[X]/\mu_f$ gilt. Wie wir eben gesehen haben, folgt daraus, dass V nicht nur eine $\mathbb{K}[X]/\mu_f$, sondern auch eine $\mathbb{K}[X]/P$-Modulstruktur hat.
Da $\mathbb{K}[X]/P \simeq \mathbb{K}[X]/P_1 \times \mathbb{K}[X]/P_2$ gilt, folgt mit Tutoriumsblatt 1, Aufgabe 2, dass

$$V \simeq e_1V \oplus e_2V \tag{1}$$

wir nutzen diese Aussage nun als Basis für unseren Beweis - wir müssen zeigen, dass $e_1V \simeq \ker(P_1(f)) \simeq \mathsf{im}(P_2(f))$ gilt.
Wir wollen also nun konkrete Darstellungen der Polynome e_1, e_2 finden: P_1, P_2 sind (in $\mathbb{K}[X]/P$) teilerfremd, also existieren mit dem Lemma von Bezout für Hauptidealringe zwei Polynome $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]/P$, sodass
$$\mathbb{1}_{\mathbb{K}} = Q_1P_1 + Q_2P_2$$
Wir definieren nun

$$e_1 := Q_2P_2, \quad e_2 := Q_1P_1$$

also klarerweise $e_1 + e_2 = \mathbb{1}_{\mathbb{K}}$. Es gilt

$$e_1 = Q_2P_2 \equiv 0 \mod P_2$$

also gilt auch $e_1 e_2 = Q_1 P_1 Q_2 P_2 = 0$ sowohl in $\mathbb{K}[X]/P_1$, als auch $\mathbb{K}[X]/P_2$. Weiter gilt für $F \in \mathbb{K}[X]/P_1$, dass

$$Fe_1 = Fe_1 + F \cdot (P_1 Q_1) = F \mathbb{1}_{\mathbb{K}} = F$$

also ist e_1 tatsächlich das neutrale Element von $\mathbb{K}[X]/P_1$ und analog für a_2. Wir folgern:

$$V \simeq e_1 V \oplus e_2 V$$

Wir zeigen nun die Isomorphien zwischen den Untermoduln: Es gilt

$$e_1 \cdot V \simeq P_2 Q_2 \cdot V = \{P_2 Q_2 \cdot v \mid v \in V\} = \{(P_2 Q_2)(f)(v) \mid v \in V\} = \mathsf{im}((P_2 Q_2)(f))$$

Da $Q_2(f)(v) \in V$ liegt, gilt $\mathsf{im}((P_2 Q_2)(f)) \subseteq \mathsf{im}(P_2(f))$ Für die umgekehrte Inklusion berechnen wir:

$$P_2 = \mathbb{1}_{\mathbb{K}} P_2 = a_1 P_2 + a_2 P_2 = Q_1 P_1 P_2 + Q_2 P_2^2 \equiv Q_2 P_2^2 \mod P$$

Also gilt auch

$$\mathsf{im}((P_2)(f)) = \mathsf{im}((Q_2 P_2^2)(f)) \subseteq \mathsf{im}(Q_2 P_2)(f)$$

mit der gleichen Argumentation. Wir zeigen das analog für a_2 und erhalten

$$V \simeq a_1 V \oplus a_2 V = \mathsf{im} P_1(f) \oplus \mathsf{im} P_2(f)$$

Es gilt $P(f) = (P_1 P_2)(f) = (P_2 P_1)(f) = 0$, also gilt $\ker(P_1(f)) \supseteq \mathsf{im}(P_2(f))$ und $\ker(P_2(f)) \supseteq \mathsf{im}(P_1(f))$. Betrachten wir alle diese Moduln als Vektorräume, dann gilt (da sie endlich dimensional sind)

$$\dim \mathsf{im} P_j(f) + \dim \ker P_j(f) = \dim V$$

und gleichzeitig $\dim P_1(f) + \dim P_2(f) = \dim V$, also folgt zusammen $\dim \mathsf{im} P_2(f) = \dim \ker P_1(f)$ und da $\mathsf{im} P_2(f) \subseteq \ker P_1(f)$ gilt, folgt daraus $\mathsf{im} P_2(f) = \ker P_1(f)$. Damit folgt

$$V \simeq \ker P_1(f) \oplus \ker P_2(f)$$